

УДК 539.3

Изгиб полубесконечной прямоугольной пластины: полиномиальное решение

Д. П. Голоскоков¹, А. В. Матросов²

¹Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Россия, 190031, Санкт-Петербург, Московский пр., 9

²Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7–9

Для цитирования: Голоскоков Д. П., Матросов А. В. Изгиб полубесконечной прямоугольной пластины: полиномиальное решение // Известия Петербургского государственного университета путей сообщения. СПб.: ПГУПС, 2026. Т. 23, вып. 1. С. 154–162. DOI: 10.20295/1815-588X-2026-1-154-162

Аннотация

Цель: исследовать напряженно-деформированное состояние тонкой однородной изотропной полубесконечной прямоугольной пластины, защемленной по двум параллельным кромкам и как угодно закрепленной или свободной на третьей кромке. Показать возможность использования полученного решения для полубесконечной пластины при исследовании напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин конечных размеров. **Методы:** для решения поставленной задачи используется метод Л. В. Канторовича с базисными функциями, построенными на основе полиномов Якоби и удовлетворяющими граничным условиям на параллельных кромках полубесконечной пластины. Указанные базисные функции обладают свойством квазиортогональности своих первых и вторых производных, что приводит к расщеплению системы обыкновенных дифференциальных уравнений метода Л. В. Канторовича на отдельные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые легко решаются аналитически. **Результаты:** получено приближенное аналитическое решение задачи изгиба полубесконечной прямоугольной пластины для различных случаев закрепления пластины. Показано, что полученное решение быстро сходится как для прогиба, так и для изгибающих моментов. Продемонстрирована эффективность использования решения задачи изгиба полубесконечной пластины для исследования напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин конечных размеров. Для этого построены решения задачи изгиба прямоугольных пластин конечных размеров при разных случаях закрепления. Использовались решение Бубнова — Галеркина для защемленной по контуру пластины и решение М. Леви для пластины, защемленной по двум параллельным кромкам и шарнирно опертой по двум другим кромкам. **Практическая значимость:** получено решение задачи изгиба полубесконечной пластины при разных граничных условиях. Данное решение может использоваться при расчете прямоугольных пластин конечных размеров.

Ключевые слова: полубесконечная прямоугольная пластина, изгиб пластины, метод Л. В. Канторовича, метод Бубнова — Галеркина, решение М. Леви, полиномы Якоби

Введение

В работе [1] отмечается, что решением более простой задачи изгиба полубесконечной пластины можно воспользоваться для расчета пластины конечных размеров. Этим определяется актуальность исследования изгиба полубесконечной пластины.

В монографии С. П. Тимошенко [1] приведены примеры решений задач об изгибе прямоугольной полубесконечной пластины при разных граничных условиях. В случае пластины, защемленной по двум противоположным краям со свободно опертой третьей стороной, получено выражение для прогиба

в виде интеграла с бесконечным пределом интегрирования.

В работе [2] приводится решение задачи об изгибе защемленной полубесконечной прямоугольной пластины, нагруженной равномерно распределенным давлением.

Впервые решение задачи об изгибе защемленной полубесконечной пластины было получено методом Л. В. Канторовича в работе [3]. В этой статье приводятся результаты статьи [2] как частный случай.

Постановка задачи и метод ее решения

Ограничимся рассмотрением полубесконечной изотропной пластины. Уравнение изгиба такой пластины, нагруженной произвольной поперечной нагрузкой $q(\xi, \eta)$, ($0 \leq \xi < \infty$, $-b \leq \eta \leq b$) имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} = \frac{b^4 q(\xi, \eta)}{D},$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость

пластины; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; $w(\xi, \eta)$ — функция нормального прогиба, h — толщина пластины.

Введем безразмерные координаты $x = \xi / b$, $y = \eta / b$, $y|_{\eta=\pm b} = \pm 1$, $x|_{\xi=0} = 0$ так, что $x \geq 0$, $-1 \leq y \leq 1$.

Введем безразмерный прогиб $W = Dw/b^4 q_0$, где q_0 — характерный размер поперечной нагрузки. Тогда уравнение изгиба принимает вид:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{q_0}. \quad (1)$$

Изгибающие моменты:

$$m_x = \frac{M_x}{b^2 q_0} = - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right),$$

$$m_y = \frac{M_y}{b^2 q_0} = - \left(\nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right).$$

Крутящий момент:

$$m_{xy} = \frac{M_{xy}}{b^2 q_0} = -(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}.$$

Перерезывающие силы:

$$N_x = \frac{V_x}{b q_0} = - \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right),$$

$$N_y = \frac{V_y}{b q_0} = - \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right),$$

$$S_x = \frac{Q_x}{b q_0} = - \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right),$$

$$S_y = \frac{Q_y}{b q_0} = - \left(\frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right).$$

Будем искать решение задачи в форме ряда:

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x) h_k(y), \quad (2)$$

где $h_k(y)$ — полиномы, удовлетворяющие однородным граничным условиям:

$$h_k(\pm 1) = h_k'(\pm 1) = 0; \quad (3)$$

$g_k(x)$ — неизвестные функции, которые определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений метода Л. В. Канторовича.

Используя метод Бубнова — Галеркина [4], получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций $g_k(x)$:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left[\delta_{is} \frac{d^4 g_i}{dx^4} + 2a_{is} \frac{d^2 g_i}{dx^2} + b_{is} g_i \right] = q_s(x), \quad s = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (4)$$

Здесь

$$\delta_{is} = \begin{cases} 1, & i = s, \\ 0, & i \neq s, \end{cases} \quad a_{is} = \int_{-1}^{+1} \frac{d^2 h_i(y)}{dy^2} h_s(y) dy, \quad b_{is} =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{d^4 h_i(y)}{dy^4} h_s(y) dy, \quad (5)$$

$$q_s(x) = \frac{1}{q_0} \int_{-1}^1 q(x, y) h_s(y) dy.$$

Систему дифференциальных уравнений (4) можно упростить, если принять предположение об ортогональности первых и вторых производных полиномов $h_k(y)$, то есть:

$$a_{ks} = \begin{cases} a_{kk}, & k = s, \\ 0, & k \neq s, \end{cases} \quad b_{ks} = \begin{cases} b_{kk}, & k = s, \\ 0, & k \neq s. \end{cases}$$

Тогда получаем вместо (4):

$$\frac{d^4 g_k(x)}{dx^4} + 2a_{kk} \frac{d^2 g_k(x)}{dx^2} + b_{kk} g_k(x) = q_k(x), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (6)$$

В качестве полиномов $h_k(y)$ выбираем полиномы

$$h_k(y) = \left\{ \frac{(2k+9)\Gamma(k+1)\Gamma(k+9)}{2^9\Gamma(k+5)\Gamma(k+5)} \right\}^{\frac{1}{2}} P_k^{(4,4)}(x),$$

ортонормированные на отрезке $[-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 h_m(y) h_n(y) dy = \delta_{m,n}.$$

Эти полиномы удовлетворяют условиям (3) и построены на основе полиномов Якоби [5, 6, 7, 8, 9].

Здесь

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = N_n^{(\alpha,\beta)} J_n^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$$N_n^{(\alpha,\beta)} = \left\{ \frac{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \cdot \left[(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n} \right],$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция (эйлеров интеграл 2-го рода). Полиномы $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ нормированы с весом $\rho(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, ($\alpha > -1$, $\beta > -1$). Общее решение уравнения (6) запишем в виде:

$$g_k(x) = e^{-\alpha_k x} (C_{1k} \cos \beta_k x + C_{2k} \sin \beta_k x) + e^{\alpha_k x} (C_{3k} \cos \beta_k x + C_{4k} \sin \beta_k x) + \Phi_k(x); \quad (7)$$

где $\Phi_k(x)$ — частное решение неоднородного уравнения (6), $\gamma_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ — корни характеристического уравнения:

$$\gamma_k^4 + 2a_{kk}\gamma_k^2 + b_{kk} = 0.$$

Приведем несколько первых корней:

k	α_k	β_k
0	2,075148920	1,142909900
1	3,655963124	1,538202315
2	5,258542818	2,062103917
3	6,942082397	2,681885160
4	8,728814208	3,404731632
5	10,62722672	4,235321441
6	12,64040430	5,174922315
7	14,76902179	6,222861461

Пусть край $x = 0$ полубесконечной пластины зашпелен. Граничные условия на этой кромке принимают вид:

$$g_k(0) = g_k'(0) = 0. \quad (8)$$

В силу ограниченности решения $W(x,y)$ при $x \rightarrow \infty$ решение (7) представим в виде:

$$g_k(x) = e^{-\alpha_k x} (C_{1k} \cos \beta_k x + C_{2k} \sin \beta_k x) + \Phi_k(x). \quad (9)$$

Используя решение (9), построим новые линейно независимые функции:

$$g_{0k}(x) = e^{-\alpha_k x} \left(\cos \beta_k x + \frac{\alpha_k}{\beta_k} \sin \beta_k x \right);$$

$$\varphi_{0k}(x) = e^{-\alpha_k x} \frac{1}{\beta_k} \sin \beta_k x.$$

Таким образом, вместо решения (9) можно также воспользоваться решением:

$$g_k(x) = C_{1k} g_{0k}(x) + C_{2k} \varphi_{0k}(x) + \Phi_k(x). \quad (10)$$

Определив постоянные интегрирования C_{1k} и C_{2k} в соответствии с условиями (8) и учитывая равенства:

$$g_{0k}(0) = 1, g'_{0k}(0) = 0, \varphi_{0k}(0) = 0, \varphi'_{0k}(0) = 1,$$

получим:

$$g_k(x) = -\Phi_k(0) g_{0k}(x) - \Phi'_k(0) \varphi_{0k}(x) + \Phi_k(x). \quad (11)$$

С учетом формул (2) и (11) получаем выражение для прогиба защемленной полубесконечной пластины:

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} h_k(y) \left[\Phi_k(x) - \Phi_k(0) g_{0k}(x) - \Phi'_k(0) \varphi_{0k}(x) \right]. \quad (12)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи внешней нагрузки.

Пусть нагрузка $q(x,y) = q_0 = \text{const}$. Тогда в соответствии с формулами (5) и (12):

$$q_k(x) = h_k^*, h_k^* = \int_{-1}^1 h_k(y) dy; \quad (13)$$

$$\Phi_k(x) = \frac{h_k^*}{b_{kk}}; \quad (13)$$

$$\Phi'_k(x) = 0; \quad (14)$$

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*}{b_{kk}} h_k(y) [1 - g_{0k}(x)]. \quad (15)$$

Для изгибающего момента:

$$m_x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*}{b_{kk}} \left\{ h_k(y) g_k''(x) - v h_k''(y) \times [1 - g_{0k}(x)] \right\}.$$

На пластину действует гидростатическое давление $q(x,y) = (1+y)q_0/2$. В этом случае:

$$q_k(x) = h_k^{**}, h_k^{**} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1+y) h_k(y) dy; \quad (16)$$

$$\Phi_k(x) = \frac{h_k^{**}}{b_{kk}}; \quad \Phi'_k(x) = 0;$$

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^{**}}{b_{kk}} h_k(y) [1 - g_{0k}(x)].$$

Рассмотрим случай, когда кромка $x = 0$ пластины оставлена свободной, а края $y = \pm 1$ защемлены. При решении этой задачи воспользуемся выражением (10) для функции $g_k(x)$, которое должно удовлетворять естественным граничным условиям на свободной кромке $x = 0$:

$$g_k''(0) + v a_{kk} g_k(0) = 0 \quad (17)$$

$$g_k'''(0) + (2-v) a_{kk} g_k'(0) = 0 \quad (18)$$

Подчиняя функции $g_k(x)$ граничным условиям (17) и (18), получим систему уравнений для определения C_{1k} и C_{2k} :

$$\left. \begin{aligned} C_{1k} [v a_{kk} - (\alpha_k^2 + \beta_k^2)] + C_{2k} (-2\alpha_k) &= \\ &= -[\Phi_k''(0) + v a_{kk} \Phi_k(0)]; \\ C_{1k} 2\alpha_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2) + C_{2k} [3\alpha_k^2 - \beta_k^2 + (2-v) a_{kk}] &= \\ &= -[\Phi_k'''(0) + (2-v) a_{kk} \Phi_k'(0)]. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки. Частное решение определим по формулам (13) и (14):

$$\Phi_k(x) = \Phi_k(0); \quad \Phi_k'(0) = \Phi_k''(0) = \Phi_k'''(0) = 0.$$

Из системы (19) находим:

$$\left. \begin{aligned} C_{1k} &= -\frac{1}{\Delta_k} [3\alpha_k^2 - \beta_k^2 + (2-v)] v \Phi_k(0) = -C_{1k}^* \Phi_k(0); \\ C_{2k} &= \frac{1}{\Delta_k} 2v \alpha_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2) \Phi_k(0) = C_{2k}^* \Phi_k(0); \\ \Delta_k &= (\alpha_k^2 + \beta_k^2)^2 - [2\beta_k^2 + 2\alpha_k^2(1-2v) - v(2-v)]. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Здесь введены обозначения:

$$C_{1k}^* = \frac{v [3\alpha_k^2 - \beta_k^2 + (2-v)]}{\Delta_k},$$

$$C_{2k}^* = \frac{2v \alpha_k (\alpha_k^2 + \beta_k^2)}{\Delta_k}.$$

С учетом формул (2), (10), (9) и (20) найдем прогиб пластины:

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*}{b_{kk}} h_k(y) [1 - C_{1k}^* g_{0k}(x) + C_{2k}^* \varphi_{0k}(x)] \quad (21)$$

и изгибающий момент:

$$m_x = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*}{b_{kk}} \left\{ v h_k''(y) [1 - C_{1k}^* g_{0k}(x) + C_{2k}^* \varphi_{0k}(x)] + h_k(y) \times [-C_{1k}^* g_k''(x) + C_{2k}^* \Phi_{0k}''(x)] \right\}.$$

Пусть теперь кромка пластины $x = 0$ свободно оперта, а кромки $y = \pm 1$ защемлены. Решение этой задачи может быть выражено через интегралы с бесконечными пределами.

Граничные условия для функции $g_k(x)$ на свободно опертой кромке $x = 0$ пластины будут выполнены, если принять:

$$g_k(0) = g_k''(0) = 0.$$

Окончательное выражение для прогиба пластины под равномерно распределенной нагрузкой:

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*}{b_{kk}} h_k(y) \left[1 - g_{0k}(x) + \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2\alpha_k} \varphi_{0k}(x) \right]. \quad (22)$$

Для изгибающего момента:

$$m_x = \frac{M_x}{b^2 q_0} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k^*}{b_{kk}} \left\{ h_k(y) \left[\frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2\alpha_k} \varphi_{0k}''(x) - g_{0k}''(x) \right] + v h_k''(y) \left[1 - g_{0k}(x) + \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{2\alpha_k} \varphi_{0k}(x) \right] \right\}.$$

Расчеты и анализ результатов

Рассмотрим численные результаты. Ряды (15), (16), (21) и (22) сходятся достаточно быстро. Для вычисления изгибающих моментов и перерезывающих сил следует сохранять большее число членов ряда.

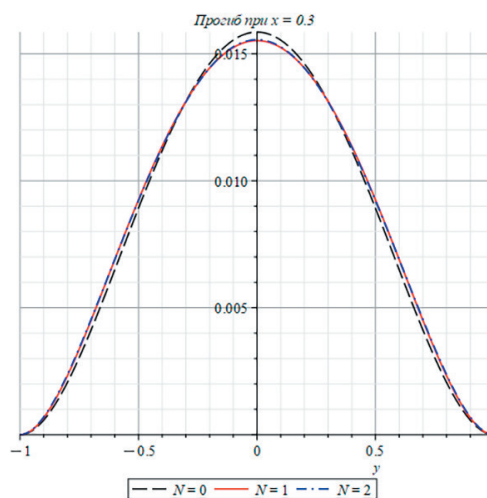
Пусть пластина находится под равномерно распределенной нагрузкой $q(x,y) = q_0 = \text{const}$. Для случая свободно опертой пластины по краю $x = 0$ примем $v = 0,2$ и, удерживая в соответствующем ряде три первых члена ($k = 0, k = 1, k = 2$), получим прогиб:

$$W_{\max} = 0,01555,$$

имеющий место при $x = 0,3, y = 0$ (рис. 1а).

Соответственно, максимальный изгибающий момент $M_{x,\max} = 0,05873$ имеет место при

а



б

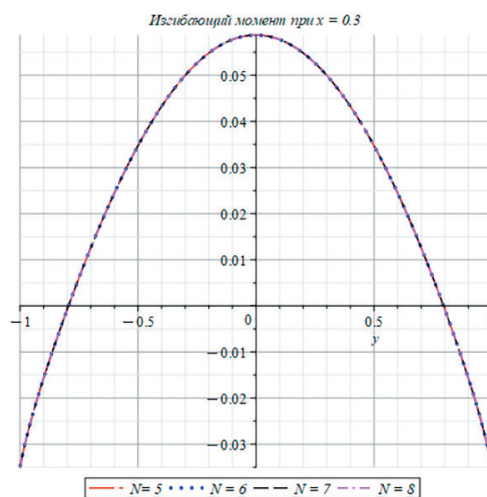


Рис. 1

$x = 0,3, y = 0$, если удержать шесть членов ряда ($k = 0, k = 1, \dots, k = 5$) (рис. 1б).

Для сравнения полученного решения была рассмотрена длинная прямоугольная изотропная пластина ($0 \leq \xi \leq a, -b \leq \eta \leq b$). Введем безразмерные координаты $x = \xi / b, y = \eta / b, y|_{\eta = \pm b} = \pm 1, x|_{\xi = 0} = 0$ так, что $0 \leq x \leq \lambda = a / b, -1 \leq y \leq 1$.

Введем безразмерный прогиб $W = Dw / (b^4 q_0)$, где q_0 — характерный размер поперечной нагрузки. Тогда уравнение изгиба принимает вид (1). Рассматривается пластина, защемленная при $y = \pm 1$ и шарнирно опертая при

$x = 0$ и $x = \lambda = a / b$, давление $q(x, y) = q_0 = \text{const}$.

Рассматриваемая задача имеет точное решение в форме М. Леви:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(y) \sin(\beta_n x), \beta_n = \frac{n\pi}{\lambda},$$

где функции $f_n(y)$ определяются как решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4}{dy^4} f_n(y) - 2\beta_n^2 \frac{d^2}{dy^2} f_n(y) + \beta_n^4 f_n(y) &= q_n(y), \\ f_n(y)|_{y=\pm 1} &= 0, f_n'(y)|_{y=\pm 1} = 0, \\ q_n(y) &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} \frac{q(x, y)}{q_0} \sin(\beta_n x) dx. \end{aligned} \right\} (23)$$

Задача (23) легко решается. Общее решение дифференциального уравнения (23):

$$\begin{aligned} f_n(y) &= C_{1,n} \text{ch}\left(\frac{n\pi y}{\lambda}\right) + C_{2,n} y \text{ch}\left(\frac{n\pi y}{\lambda}\right) + \\ &+ C_{3,n} \text{sh}\left(\frac{n\pi y}{\lambda}\right) + C_{4,n} y \text{sh}\left(\frac{n\pi y}{\lambda}\right) - \\ &\frac{2\lambda^4 \left((-1)^n - 1\right)}{n^5 \pi^5}. \end{aligned}$$

После подстановки этого решения в граничные условия (23) и определения произвольных постоянных C_{1k} , C_{2k} , C_{3k} , C_{4k} получаем:

$$\left. \begin{aligned} C_{1,n} &= \frac{2\lambda^4 \left((-1)^n - 1\right) \left(\pi \text{ch}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) n + \text{sh}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) \lambda\right)}{n^5 \pi^5 \left(\text{sh}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) \lambda \text{ch}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) + n\pi\right)}, \\ C_{2,n} &= 0, \quad C_{3,n} = 0, \\ C_{4,n} &= -\frac{2\lambda^4 \left((-1)^n - 1\right) \text{sh}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right)}{\pi^4 n^4 \left(\text{sh}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) \lambda \text{ch}\left(\frac{n\pi}{\lambda}\right) + n\pi\right)}. \end{aligned} \right\}$$

Из последних формул видим, что отличными от нуля будут только члены ряда с нечетными индексами.

Для сравнения приведем максимальное значение прогиба при $x = 0,3$; $y = 0$ в случае длинной пластины ($0 \leq x \leq \lambda$, $-1 \leq y \leq 1$) при $\lambda = 5$:

$$W_{max}^{exact} = 0,01561. \quad (24)$$

Результат (24) получен как точное решение краевой задачи в форме М. Леви при удержании семи членов ряда ($n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13$). Погрешность с решением для полубесконечной пластины составляет:

$$\left| \frac{W_{max}^{exact} - W_{max}}{W_{max}^{exact}} \right| \cdot 100\% \approx 0,37\%.$$

Соответственно, изгибающий момент при $x = 0,3$; $y = 0$:

$$M_{x,max}^{exact} = 0,05874. \quad (25)$$

Результат (25) получен как точное решение краевой задачи в форме М. Леви при удержании 30 членов ряда.

Погрешность с решением для полубесконечной пластины составляет:

$$\left| \frac{M_{x,max}^{exact} - M_{x,max}}{M_{x,max}^{exact}} \right| \cdot 100\% \approx 0,017\%.$$

Для случая защемленной по краю $x = 0$ полубесконечной пластины, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q(x, y) = q_0 = \text{const}$, примем $\nu = 0,2$ и, удерживая в соответствующем ряде три первых члена ($k = 0, k = 1, k = 2$), получим прогиб:

$$W_{max} = 0,00674,$$

имеющий место при $x = 0,3$; $y = 0$ (рис. 2а).

Соответственно, максимальный изгибающий момент:

$$W_{max} = -0,03880$$

имеет место при $x = 0,3$; $y = 0$, если удерживать семь членов ряда ($k = 0, k = 1, \dots, k = 6$) (рис. 2б).

Для сравнения полученного решения была рассмотрена длинная прямоугольная изотропная пластина ($0 \leq \xi \leq a$, $-b \leq \eta \leq b$). Введем безразмерные координаты $x = \xi / b$, $y = \eta / b$, $y|_{\eta=\pm b} = \pm 1$, $x|_{\xi=0} = 0$ так, что $0 \leq x \leq \lambda = a / b$, $-1 \leq y \leq 1$. Введем безразмерный прогиб

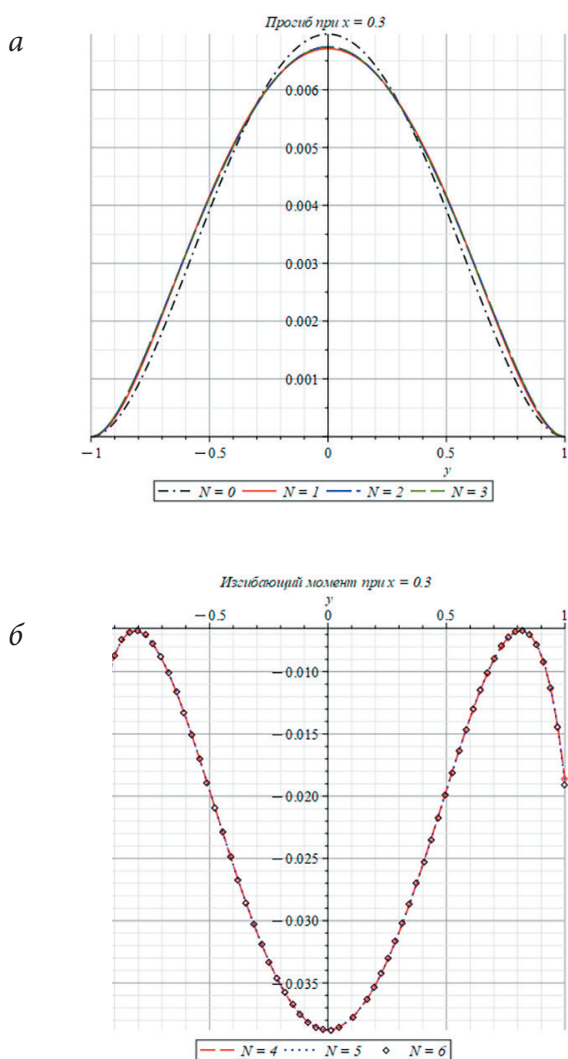


Рис. 2

$W = Dw/b^4 q_0$, где q_0 — характерный размер поперечной нагрузки. Тогда уравнение изгиба принимает вид (1). Граничные условия: защемление при $y = \pm 1$ и $x = 0, \lambda$. Поперечная нагрузка: $q(x, y) = q_0 = \text{const}$.

Рассматриваемая задача не имеет точного решения. Будем искать решение методом Бубнова — Галеркина в форме:

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{m,n} g_m(x) h_n(y),$$

где функции $g_m(x)h_n(y)$ — ортонормированные функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям:

$$h_n(\pm 1) = 0, h_n'(\pm 1) = 0,$$

$$g_n(0) = 0, g_n(\lambda) = 0, g_n'(0) = 0, g_n'(\lambda) = 0,$$

построенные на основе степенных функций $\{(x - \lambda)^2 x^{m+1}\}_{m=1}^{\infty}, (y^2 - 1)^2 y^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ и ортонормированные с помощью процесса ортогонализации Грамма — Шмидта.

Для сравнения приведем максимальное значение прогиба при $x = 0,3; y = 0$ в случае длинной пластины ($0 \leq x \leq \lambda, -1 \leq y \leq 1$) при $\lambda = 5$:

$$V_{\max} = 0,00683. \quad (26)$$

Результат (26) получен при удержании по пять членов ряда по каждой переменной ($m, n = 1, 3, 5, \dots, 9$). Погрешность с решением для полубесконечной пластины составляет:

$$\left| \frac{V_{\max} - W_{\max}}{V_{\max}} \right| \cdot 100\% \approx 1,32 \%.$$

Соответственно, изгибающий момент при $x = 0,3; y = 0$:

$$M_{x,\max}^{\text{Bubnov}} = -0,03740. \quad (27)$$

Результат (27) получен при удержании по семь членов ряда по каждой переменной ($m, n = 1, 3, 5, \dots, 13$).

Погрешность с решением для полубесконечной пластины составляет:

$$\left| \frac{M_{x,\max}^{\text{Bubnov}} - M_{x,\max}}{M_{x,\max}^{\text{Bubnov}}} \right| \cdot 100\% \approx 3,74 \%.$$

Аналогичным приемом можно решить краевые задачи об изгибе полубесконечной пластины под действием произвольной нагрузки при любом закреплении края $x = 0$: а) противоположные кромки $y = \pm 1$ свободно оперты; б) один край $y = -1$ защемлен, а другой $y = 1$ свободно оперт.

Для случая полубесконечной пластины, у которой один противоположный край защемлен, а другой свободно оперт при любом закреплении третьего края $x = 0$, в выражении

(1) следует заменить полиномы $h_k(y)$ на другие полиномы Якоби, которые удовлетворяют соответствующим однородным граничным условиям. При этом структура дифференциальных уравнений для определения функций $g_k(y)$ полностью сохраняется.

Список источников

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Гопалачариулу. Защемленные полубесконечные пластины // Прикладная механика. 1966. № 1. С. 195–197.
3. Голоскоков П.Г. Изгиб прямоугольной плиты, жестко заделанной по двум противоположным сторонам // Изв. вузов. Сер: Строительство и архитектура. 1959. № 11–12. С. 25–34.
4. Канторович Л.В. Использование идеи метода Галеркина в методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // ПММ. 1942. Вып. 6. С. 31–40.
5. Аверьянова Г.В., Голоскоков Д.П. Расчет тонких пластин при помощи полиномов специального вида // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 1. С. 70–76.
6. Голоскоков Д.П., Голоскоков П.Г. Метод полиномов в задачах теории тонких плит. СПб.: СПГУВК, 2008. 254 с.
7. Голоскоков Д.П., Матросов А.В., Олемской И.В. Изгиб защемленной тонкой изотропной пластины методом Канторовича с использованием специальных полиномов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2023. Т. 19, вып. 4. С. 423–442.
8. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Bending of clamped orthotropic thin plates: polynomial solution // Mathematics and Mechanics of Solids. 2022. Vol. 27, no 11. Pp. 2498–2509.
9. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.

Дата поступления: 05.11.2025

Решение о публикации: 30.01.2026

Контактная информация

ГОЛОСКОКОВ Дмитрий Петрович — д-р техн. наук, профессор; dpg1954@mail.ru
МАТРОСОВ Александр Васильевич — д-р физ.-мат. наук, доцент; avmatrosov@mail.ru

A polynomial solution for bending a semi-infinite rectangular plate

D. P. Goloskokov¹, A. V. Matrosov²

¹Emperor Alexander I Petersburg State Transport University, 9 Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031, Russia

²Saint Petersburg State University, 7–9 Universitetskaya nab., Saint Petersburg, 190029, Russia

For citation: Goloskokov D. P., Matrosov A. V. A polynomial solution for bending a semi-infinite rectangular plate // Proceedings of Petersburg State Transport University, 2026. Vol. 23, iss. 1. Pp. 154–162. DOI: 10.20295/1815-588X-2026-1-154-162. (In Russian)

Abstract

Objective: to investigate the stress-strain state of a thin, homogeneous, isotropic, semi-infinite rectangular plate that is clamped along two parallel edges, with the third edge considered either fixed or free. The study also aims to demonstrate that the derived semi-infinite plate solution can be applied to assess stress-strain fields in finite-size rectangular plates. **Methods:** the issue is tackled using L. V. Kantorovich's method with

trial (basis) functions constructed from Jacobi polynomials that satisfy the boundary conditions on the parallel clamped edges of the semi-infinite plate. These basis functions exhibit quasi-orthogonality properties for their first and second derivatives, which permits separation of the coupled ordinary differential equations produced by Kantorovich's procedure into independent ordinary differential equations that admit analytical solutions. **Results:** an approximate analytical solution for the bending of the semi-infinite rectangular plate has been obtained various clamping configurations of the plate. The derived solution demonstrates rapid convergence for both deflections and bending moments. It is shown that the stress-strain state of finite-size rectangular plates can be effectively investigated by applying the solution of the semi-infinite plate bending. To facilitate this approach, solutions for several boundary-condition configurations of the finite-size rectangular plate-bending issues have been developed. Namely, the Bubnov-Galerkin solution was used for a plate clamped along its contour, and M. Levy's solution was employed for a plate clamped along two parallel edges and pinned along the remaining two. **Practical importance:** the algorithm proposed herein for solving semi-infinite plate bending issues is recommended for practical application in determining the stress-strain state of finite-size rectangular plates.

Keywords: Semi-infinite rectangular plate, plate bending, L. V. Kantorovich method, Bubnov — Galerkin method, M. Levy solution, Jacobi polynomials

References

1. Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. *Plastinki i obolochki*. M.: Nauka, 1966. 636 s. (In Russian)
2. Gopalachariulu. *Zashchemlennye polubeskonechnye plastiny // Prikladnaya mekhanika*. 1966. No. 1. S. 195–197. (In Russian)
3. Goloskokov P.G. *Izhib pryamougol'noj plity, zhestko zadelannoj po dvum protivopolozhnym storonom // Izv. vuzov. Ser: Stroitel'stvo i arkhitektura*. 1959. No. 11–12. S. 25–34. (In Russian)
4. Kantorovich L.V. *Ispol'zovanie idei metoda Galerkina v metode privedeniya k obyknovennym differentsial'nym uravneniyam // PMM*. 1942. Vyp. 6. S. 31–40. (In Russian)
5. Aver'yanova G. V., Goloskokov D.P. *Raschet tonkikh plastin pri pomoshchi polinomov spetsial'nogo vida // Exponenta Pro. Matematika v prilozheniyakh*. 2004. No. 1. S. 70–76. (In Russian)
6. Goloskokov D.P., Goloskokov P.G. *Metod polinomov v zadachakh teorii tonkikh plit*. SPb.: SPGUVK, 2008. 254 s. (In Russian)
7. Goloskokov D.P., Matrosov A. V., Olemskoj I. V. *Izhib zashchemlennoj tonkoj izotropnoj plastiny metodom Kantorovicha s ispol'zovaniem spetsial'nykh polinomov // Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya*. 2023. T. 19, vyp. 4. S. 423–442. (In Russian)
8. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. *Bending of clamped orthotropic thin plates: polynomial solution // Mathematics and Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 27, no. 11. Pp. 2498–2509.
9. Sege G. *Ortogonal'nye mnogochleny*. M.: Fizmatlit, 1962. (In Russian)

Received: 05.11.2025

Accepted: 30.01.2026

Author's information:

Dmitrij P. GOLOSKOKOV — Dr. Sci. in Engineering, Professor; dpg1954@mail.ru

Aleksandr V. MATROSOV — Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Associate Professor; avmatrosov@mail.ru